

日常の事象や社会の事象から問題を見いだし解決する授業の創造

第3ブロック（札幌）グループ研究

札幌市立東月寒中学校 古川 航也

札幌市立新陵中学校 戸谷真由子

札幌市立南郷小学校 笠谷将太郎

札幌市立厚別北中学校 冨永 紫

札幌市立屯田北中学校 長谷川英和

札幌市立屯田中央中学校 宇田川 孝

札幌市立新琴似中学校 林 詩音

札幌市立屯田北中学校 佐々木唯衣

1. はじめに

（1）研究の動機と背景

令和3年度から実施されている学習指導要領の中で、「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」として数学的活動が表現されている。その上で、問題発見・解決の過程として二つの過程が挙げられ、その一つが「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」である。本研究はこの過程を具現化した授業実践に関する研究であり、その授業の入口である問題作成に力点をおいた。なお、本研究は数年前から行ってきたものであるが、コロナ禍で一時中断を余儀なくされた。2年ほど前から研究を再開し、現在は問題作成から実践の積み上げ、評価に至るまでに得られた成果と課題、生徒の変容についてまとめていく。

（2）研究の目的

学習指導要領において「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」が重視されている。しかし、その一方で、教科書等の問題は解決しやすいように数値や条件が設定され、生徒が数学的に処理するだけの状態になってしまっている。これでは「日常生活や社会で数学を利用する活動」に向けては

不十分である。生徒が与えられた課題や問題に対して、条件を考えたり数値を適切に処理したりしながら解決へと向かっていくことが必要ではないかと考える。そこで、私たちAグループは本研究の目的を以下のようにした。

日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決する力をつけさせる。

生徒に数学を学ぶ楽しさやよさを感じさせ、数学を日常生活や社会に生かそうとする態度や、思考力・判断力・表現力を身につけさせるために、この過程を具現化した問題づくり、ならびに授業づくりを研究していくことが大切である。そして、その際には日常生活や社会の事象を数理的に捉える一つ的手段として「理想化」や「単純化」が必要である。「理想化」や「単純化」をどのように捉えるのか、実際にどう「理想化」や「単純化」を行っていくのかということを考えていく必要がある。最後に、すべての授業において以上のような活動を行うことは難しいところではあるが、研究を重ね、多く実践を積み上げていきたい。

（3）研究の方法

「問題作成の視点」を設定し、それに合わせて授業を行う。西村（2010）を参考に、本グループでは、これまで以下の4つを設定し、大事にしてきた。

- ① 解決や考察の必要性をもたせる
- ② 現実性を大切にすること
- ③ 判断や表現をするようにすること
- ④ 数学的な価値があること

① 解決や考察の必要性をもたせる

生徒が解決の必要性を感じるようにすることが大切である。それは、他人にとっての解決の必要性でもよい。すなわち、生徒が解決を要している人の立場に近付けるように、誰が、どのようなときに、何のために、解決する必要があるのかが伝わるよう工夫する。

② 現実性を大切にすること

条件や変数を整理しすぎたり、数値を計算に都合のよいように簡単にしたり、教師が与えすぎたりしないようにする。たとえば、問題場面に関する現実の統計的なデータを用いたり、実際の写真や映像、地図などを取り入れたり、場合によっては、生徒に実験や調査を行わせたりする。

③ 判断や表現をするようにすること

数学を用いて解決できることはもちろん、生徒が数学的根拠に基づいて何らかの判断や表現ができるような問題であること。

④ 数学的な価値があること

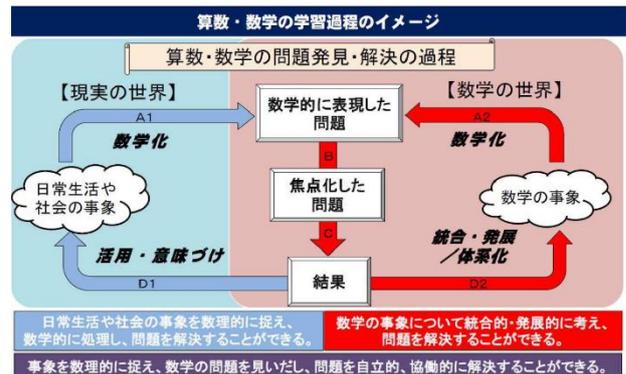
この問題を通してどんな力を身に付けさせたいのかを明確にする。「身に付けさせたい力」は、その単元で求められる数学的な知識や技能、生かす力等に限定せず、事象について論理的に考察すること、問題解決に必要な適切な条件（仮定）を設定すること、日常生活や社会の事象を数理的に捉えること、自分の考えを表現し、協働的に問題解決に取り組むことなどの資質・能力に関わるものでもよいとした。

これら4つの視点のいずれかを意識しながら問題を作成し、実践を行う。生徒の学びに向かう姿勢や生徒の振り返り、感想などを基に、数学を学ぶ楽しさやよさを感じさせることができたか、数学を日常生活や社会に生かそうという意欲や態度をもたせることができたかを踏まえつつ、授業のねらいに沿って問題を解決できたかどうかを検証する。

2. 「理想化」「単純化」の捉え方

(1) 本研究と現行学習指導要領との関連

数学的活動における問題発見・解決の過程には、下のイメージ図の通り、主として二つの過程がある。本研究では、イメージ図の左側の「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」のサイクルを軸とした数学的活動を授業構築の柱とする。



イメージ図の左側の数学的活動においては、現行学習指導要領に次のような記述がある。下線は筆者による。

日常生活や社会の事象は、そのまま数学の舞台にのせることはできないことがある。そのため、事象を数学化するには、事象に潜む関係を解明したり活用したりするなどのねらいに即して、事象を理想化したり単純化したり、条件を数学的に表現したりすることが必要である。また、得られた数学的な結果について実際の問題の答えとして受け入れるかどうかを判断するために、数学的な結果を具体的な事象に即して解釈することも必要である。このような問題発見・解決の基礎をなす技能を身に付けることにより、事象を数学の舞台にのせ、日常生活や自然界における事物・現象等の広い範囲にわたる事象について考察することができるようになる。

(2) 「数学的な考え方の先行研究」

上述の学習指導要領の記述から、生徒に「理想化」「単純化」の考え方を育む必要性があると考えた。「理想化」「単純化」に関わる数学的な考え方の先行研究として、片桐(2004)は、数学の方法に関係した数学的な考え方を、11の考え方に分類・整理し、抽象化の意味を次のように言及している。太字は筆者による。

第一に、幾つかのものに共通な性質を引き出すとする考え方が抽象化の考え方で、それと表裏の関係にあるものを捨象しようとする考え方がある。

また具体化の考え方をするのも、結局は事柄を抽象しようとするためであるから、第二のものとして、これを抽象化の考え方に含めていくのがよい。

いろいろな条件が一定であるような理想的な状態を考える。または条件や性質が数学的な定義や原理・法則の条件を満たしているような理想的な場合を考えることによって、事態が明確になることが多いが、このような理想的な状態を考えようとするのを理想化の考え方と呼ぶ。これを抽象化の考え方の第3のものとする。

第4に、条件を明確にしようとする考え方が抽象にとって必要である。

また、片桐(2004)は、単純化の意味を次のように整理している。

単純化の考え方①：幾つもの条件があつて、それらが何々であるかは分かっているが、それらのすべての条件を考慮しなければならないとき、その全部を考えるということは、はじめからはできにくいことがある。そういう場合には、そのうちのいくつかの条件を一時無視して、簡単な基本的な場合に直して考えてみようとする。このような考え方が単純化の考え方である。

単純化の考え方②：条件のいくつかを簡単なものに置き直して考えようとする考え方も、この単純化の考え方といえる。

しかし、一般性を失わないようにということは、単純化の際、忘れてはならないことである。いくら単純にしてしまふといつても、もとの問題の本質的条件や一般性を損なってしまうほどに単純化してしまったのでは意味がない。この点は理想化の考え方についても同様である。

3. 「理想化」「単純化」の考え方を育む授業実践 (1) 第1学年「1次方程式」

<本時の目標>

日常生活や社会の事象から数値を調査し、生徒

たちが自ら単純化、理想化しながら比例式の性質を利用して問題を解決することができる。

【「問題作成の視点」とのかかわり】

「問題作成の視点」の設定の「①解決や考察の必要性をもたせる」「②現実性を大切にす

る」に焦点を当てた実践である。実際には、日常生活で抽象化された描写から天体の大きさを想像すると、意見が分かれたり混乱する生徒が出た。そのためChromebookを活用し実際の数値を調べ、それを基に数学的に問題の解決に向かう学習活動を行った。解決の際、数値の単純化や理想化については生徒の判断に委ねるようにした。

<学習指導要領との関連>

「イの(イ)『一元一次方程式を具体的な場面で活用すること』に関連して、簡単な比例式を解くことを取り扱うものとする」

具体的な場面における問題を方程式を活用して解決するための方法を理解するとともに、解決過程を振り返り、得られた結果を意味付けたり活用したりしようとする態度を養うことができる。～比を基にして数量を求めるような具体的な場面において、比例式をつくり、比の値が等しいことから既習の方程式に変形することで問題を解決することができるようにする。

<提示する問題>

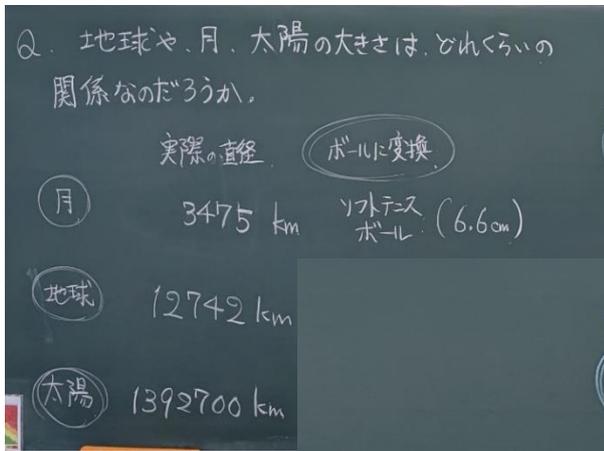
地球や月、太陽の大きさは、どれくらいの関係にあるのだろうか。

この問題は、教科書にある「比例式の利用」の問題(学校図書 中学1年 P.120)の問題を参考に作成した。木の高さの問題や地図の距離の問題からさらに桁を大きくして、実物が見えない・想像しづらい題材に対して、計算によって値を求めることに関心が高まることを期待した。

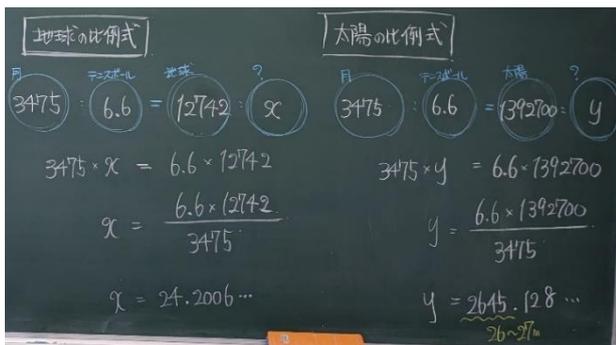
<授業の実際>

始めに、実際の星の直径の長さを調べると、「桁が大きくて想像しづらい」と感じる生徒が多かった。どうすれば比べやすいか問うと「地球儀のような、手ごろな大きさを比べたい」との意見が出たため、さまざまな大きさのボールを用意したこ

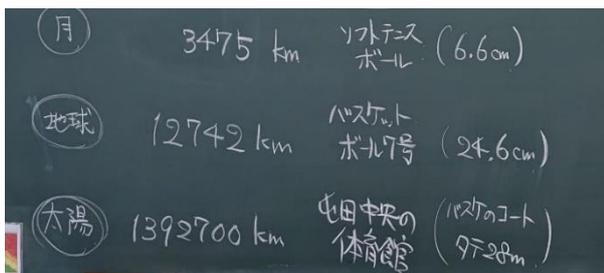
とを伝える。すると、最も小さい月の大きさをソフトテニスボールに縮小し、そのときに地球や太陽がどれくらい大きさの球になるかを考えるように方向性が決まり、



グループで協力しながら比例式をつくり、月と同じ比率で縮小したときの地球や太陽の直径の長さを求めた。



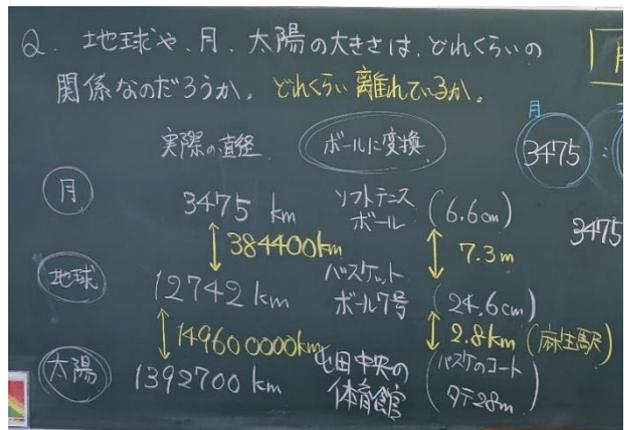
計算途中に必要ながあれば電卓の使用も許可したため、調べた星の直径の値をそのまま使って計算している生徒が多かった。さらに求めた値と近い直径のボールを調べた。生徒それぞれに求めた値を確認して、授業者が用意したボールの中から最も大きさが近いボールを選ぶと、日常生活のTVなどで表現される星の大きさから想像していたものと、計算して求めた結果の違いに驚く生徒が多かった。



ここで、ソフトテニスボール（月）とバスケットボール（地球）を手にとって見せていると、生徒の中から

地球や月、太陽はどれくらい離れているのだろうか。

という疑問があがった。また、「その問題についても比例式を使って求めることができる」と発言する生徒がいたため、同様に取り組んでいく。星どうしの実際の距離を調べ、星の直径とボールの直径の比と距離の比で比例式をつくり、縮小したときの距離を求めた。



月と地球の距離が、今回の授業で計算すると 7.3 m になるため、教室の対角線で並べることができた。

グループで活動することで、Chromebook の活用が苦手な生徒も意欲的に取り組むことができた。計算に電卓を使うことができたため、調べた数値をそのまま入力して計算する生徒が多かったが、桁が大きくなり苦勞する生徒が多かった。一方で数値を単純化、理想化してから計算する生徒もいて、お互いの数値を見比べながら、単純化、理想化することの有用性に気付く場面があった。また、予想と結果に大きな差があった生徒が多かったことから、比例式の計算を活用することで日常生活

や社会の事象に対する疑問や、お互いの認識のずれを解決する、または生徒どうしの意見を整理し納得する解を出すことができるという、数学の有用性を感じることができたと考える。

(2) 第1学年「比例の利用」

<本時の目標>

具体的な問題の数量の関係から、根拠をもって比例とみなすことができ、比例の関係を活用して問題の解決の過程を表現することができる。

【「問題作成の視点」とのかかわり】

「問題作成の視点」の設定の「**②現実性を大切に**する」「**③判断や表現をするように**する」に焦点を当てた実践である。

実際にシュレッターゴミを用意し、上記の問題を提示し、何を根拠に「比例とみなす」か、生徒に考えさせ、共有を図った。そのうえで、表、式、グラフを活用し問題の解決に向かう学習活動をおこなった。解決の際、安易に5枚までのデータの平均を求めるという学習活動にならないように配慮した。

<学習指導要領との関連>

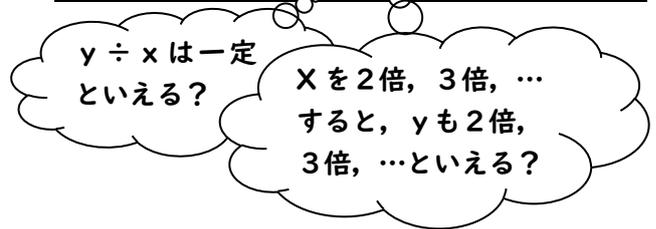
「比例、反比例を用いて具体的な事象を捉え考察し表現すること(イのイ)」日常の事象の中には厳密には比例、反比例ではないが、ある問題を解決するために比例や反比例とみなして結論を得ることがある。二つの数量の関係を表やグラフで表し、その関係を理想化したり単純化したりすることによって比例や反比例とみなし、それによって変化や対応の様子に着目して未知の状況を予測できるようになることを知ることは重要である。この際、事象を理想化したり単純化したりすることで、求めた結果の適用できる範囲に一定の制約が生じることについて理解することも重要である。

<提示する問題>

シュレッターで細かくされたコピー用紙のゴミがあります。
このゴミはA4用紙何枚分になりますか。

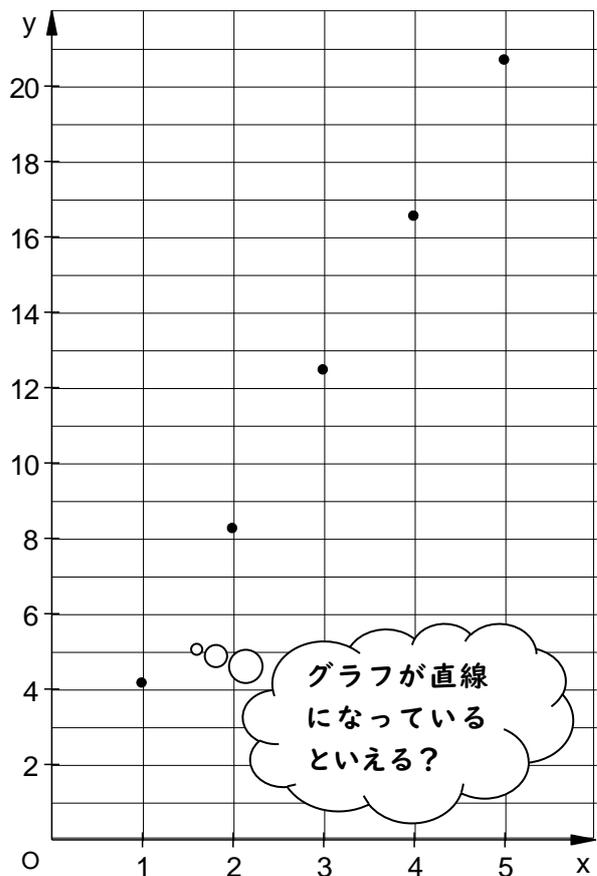
<提示する情報> ゴミの重さ 6.34kg

枚数 (枚)	1	2	3	4	5
重さ (g)	4.15	8.25	12.46	16.54	20.68



<授業の実際>

導入で、何が分かれば何枚分か求められるかを聞いたところ、1枚の重さという発言があったが、すかさず「1枚1枚重さは違う」というつぶやきがあった。その後、表を提示したところ「比例になっていない」という声が多かった。「平均にしたらどうか」という発言があったが、「全部同じにしてくれればいいのに」というつぶやきもあったため、グラフにプロットしてどうなるかを問い、あまり違いがなく直線になることを根拠に比例とみなすということを共有して、個人思考の時間をとった。



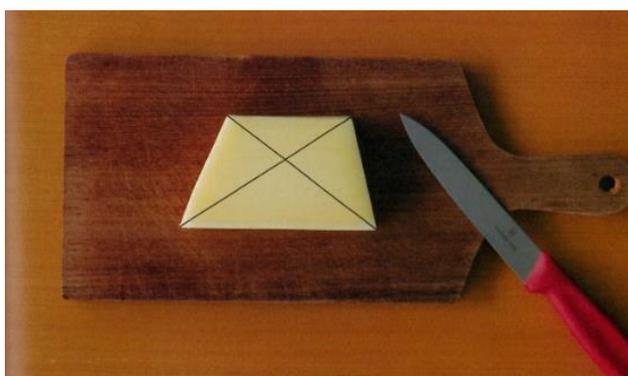
(3) 第2学年「平行線と面積」(1/2)

<本時の目標>

日常の複雑な問題を簡単な問題に置き換え、等積変形の考えや面積の性質を使って解決することができる。

<問題> ※要約

お母さんのナチュラルチーズの切り方が正しいこと(左右のチーズの大きさが等しいこと)を証明しよう。



(図1)

提示する情報

クロームブックでページ全体を提示(図2)

<研究との関わり>

(1) 問題作成の視点

「②現実性を大切にする」に焦点を当てた実践である。現実の問題場面を想定した問題文から必要な情報を取り出し、簡単にしていくことで面積に焦点を当てた問題になるような展開にした。

(2) 「理想化」「単純化」の考えを育んだ場面

- ① 「2つのチーズの大きさが等しいことを言えればいい」という課題を、厚さを無視して「2つのチーズの面積が等しいことを言えればいい」という課題にする。(単純化)
- ② 問題文でも触れられているが、「チーズの形は台形とみなしてよい」という確認のもと、台形の性質として「1組の辺が平行である」ことを見出す。(理想化)

<授業の実際>

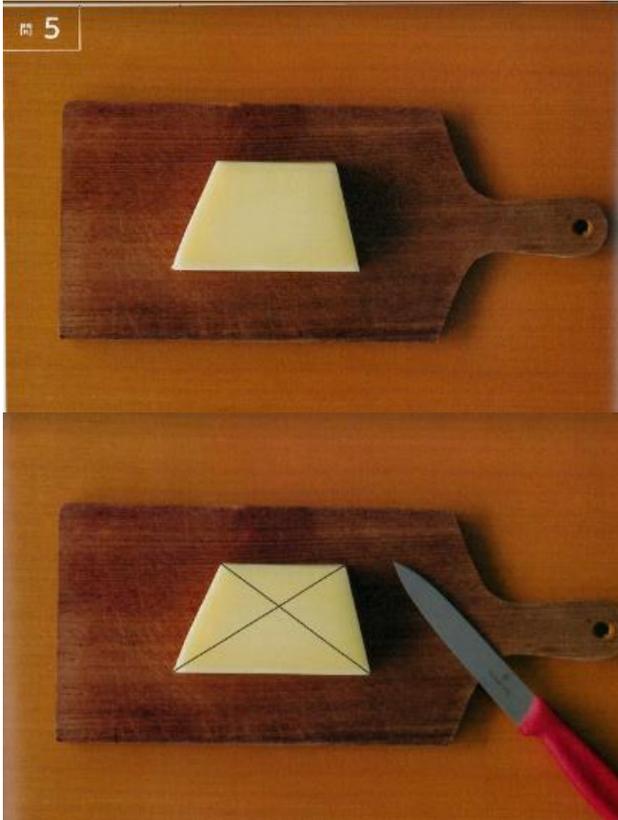
導入は複雑な書籍の問題をそのまま提示し、課題の把握と条件の整理を行った。「文章が長い」という生徒の反応から、「条件を整理してみよう」と働きかけ、「2つのチーズの大きさが等しいことが言えればいい」という結論になり、学習課題とした。

その後、個人解決の時間を取ったが、その中で生徒から「厚みは2cmで全部同じ」という条件をもとに「2つのチーズの面積が等しいことを言えればいい」と、課題を簡単にするアイデアが生まれたので全員で共有し、学習課題を修正した。

その後の個人解決の時間では、2つのチーズの三角形の底辺も高さもばらばらであることから、思考が進まない生徒がほとんどであった。数人の生徒は上下の線は平行な直線であること(チーズ全体は台形であること)に着目して、底辺と高さが等しいことから大きな三角形の面積が等しいことを見出していた。しかし、その後は交流を経ても共通の三角形の面積を引くという発想が思い浮かばなかった。そのため、教師が黒板に図示し、ヒントを与えながら解決に向かう形となった。

授業の最後には、等積変形の考えと「 $S_1 = S_2$ ならば $S_1 - S = S_2 - S$ 」の考え(面積の性質)をまとめて終わった。

等積変形の導入としてこの問題を扱ったが、問題の難易度を考えると、等積変形の考えと「 $S_1 = S_2$ ならば $S_1 - S = S_2 - S$ 」の考え(面積の性質)を両方扱うのは難しいように感じた。そのため等積変形の学習後に等積変形の利用として出題するのはどうかと思う。しかし、複雑な問題文から必要な情報を取り出し、簡単にしていく力、「理想化」「単純化」をする力を付ける問題としては価値のある問題であると感じた。今回の授業では、生徒の様子から前述した研究との関わり(1)と(2)―①は達成できたと考える。(2)―②については生徒の理解が浅いまま終わってしまったが、問題を整理する場面で教師が丁寧に扱うことで目を向けさせることができたのではないかと。「理想化」「単純化」に目を向けさせられるよう丁寧に扱いながら、生徒の実態を見極め、問題の難易度や学習順序に留意することを今後の課題とした。



(図2)

お母さんのチーズ分割法

佐藤家は、お父さんとお母さんと双子の兄弟の4人家族。兄弟は今小学4年生です。

お母さんは、2人に対してなんでも平等に与えてきました。そうしないと、すぐけんかになってしまうからです。

ある日、お父さんが会社帰りにデパ地下に寄って一家みんなが大好きなチーズを買ってきました。厚みは2cmくらいのナチュラルチーズです。上から見ると、台形でした。左右の辺の長さは、どうやら同じではなさそうです。

お母さんは、兄弟に同じ量のチーズを食べさせたいと思い、写真のようにナイフを入れるようにしました。下の大きい三角形はお父さん。上の小さい三角形は、自分にとることにして、兄弟には、左右の三角形をあげることにしました。ところが、兄弟は左右では大きさが違うと言って承知しません。

さて、みなさん。お母さんの切り方が正しいことを証明していただけないでしょうか。

4. 成果と課題

(1) 成果

「問題作成の視点」をもとに、「日常生活や社会の事象を数理的に捉える」過程を重要視した授業づくりができた。その中で、生徒の思考が自ずと「理想化」、「単純化」に向かう場面を展開することができた。

(2) 課題

教師側からの働きかけによって「理想化」や「単純化」がはかられる場合とそうでない場合があった。「理想化」や「単純化」を期待する部分で適切に行われなかったり、問題を提示した段階でもうすでにそれらが行われてしまっていたりする場面があった。今後はそういったことを踏まえながらの授業づくりや実践を考えていく。

また、「理想化」や「単純化」への考え方を定着させるためには一度きりの学習にするのではなく、教育課程全体を見通して、学び直しや繰り返し学習することが必要である。同じような問題が出てきた際に「理想化」や「単純化」ができるのかどうか、問題解決の力となっているのかどうかを確かめるために、単元構成を考えて継続して授業を行っていくことが必要であると考えている。

参考文献

- ・中島健三, 2015, 算数・数学教育と数学的な考え方 その進展のための考察, 東洋館出版
- ・片桐重男, 2004, 新版 数学的な考え方とその指導 第1巻 数学的な考え方の具体化と指導, 明治図書
- ・西村圭一, 2010, 中学校数学科 活用型学習の実践事例集 豊かに生きる力をはぐくむ数学授業, 明治図書
- ・佐藤雅彦, 大島遼, 廣瀬隼也, 2021, 解きたくなる数学, 岩波書店