

日常の事象や社会の事象から問題を見いだし解決する授業の創造

第3ブロック（札幌）グループ研究

札幌市立東月寒中学校 古川 航也
札幌市立新陵中学校 戸谷真由子
札幌市立南郷小学校 笠谷将太郎
札幌市立厚別北中学校 富永 紫
札幌市立清田中学校 原口 朋大

札幌市立あいの里東中学校 長谷川英和
札幌市立屯田中央中学校 宇田川 孝
市立札幌開成中等教育学校 林 詩音
札幌市立真栄中学校 佐々木唯衣
札幌市立平岸中学校 横山 和誉

1. はじめに

(1) 研究の動機と背景

令和3年度から実施されている学習指導要領の中で、「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」として数学的活動が表現されている。その上で、問題発見・解決の過程として二つの過程が挙げられ、その一つが「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」である。本研究はこの過程を具現化した授業実践に関する研究であり、その授業の入口である問題作成に力点をおいた。以下、実践を積み上げ、評価に至るまでに得られた成果と課題、生徒の変容についてまとめていく。

(2) 研究の目的

学習指導要領において「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」が重視されている。しかし、その一方で、教科書等の問題は解決しやすいように数値や条件が設定され、生徒が数学的に処理するだけの状態になってしまっている。これでは「日常生活や社会で数学を利用する活動」に向けては不十分である。生徒が与えられた課題や問題に対して、条件を考えたり数値を適切に処理したりしながら解決へと向かっていくことが必要ではない

かと考える。そこで、私たちのグループは本研究の目的を以下のようにした。

日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決する力をつけさせる。

生徒に数学を学ぶ楽しさやよさを感じさせ、数学を日常生活や社会に生かそうとする態度や、思考力・判断力・表現力を身につけさせるために、この過程を具現化した問題づくり、ならびに授業づくりを研究していくことが大切である。そして、その際には日常生活や社会の事象を数理的に捉える一つ的手段として「理想化」や「単純化」が必要である。「理想化」や「単純化」をどのように捉えるのか、実際にどう「理想化」や「単純化」を行っていくのかということを考えていく必要がある。最後に、すべての授業において以上のような活動を行うことは難しいところではあるが、研究を重ね、多く実践を積み上げていきたい。

(3) 研究の方法

「問題作成の視点」を設定し、それに合わせて授業を行う。西村（2010）を参考に、本グループでは、これまで以下の4つを設定し、大事にしてきた。

- ① 解決や考察の必要性をもたせる
- ② 現実性を大切にする
- ③ 判断や表現をするようにする
- ④ 数学的な価値があること

① 解決や考察の必要性をもたせる

生徒が解決の必要性を感じるようにすることが大切である。それは、他人にとっての解決の必要性でもよい。すなわち、生徒が解決を要している人の立場に近付けるように、誰が、どのようなときに、何のために、解決する必要があるのかを伝えるよう工夫する。

② 現実性を大切にす

条件や変数を整理しすぎたり、数値を計算に都合のよいように簡単にしたり、教師が与えすぎたりしないようにする。たとえば、問題場面に関する現実の統計的なデータを用いたり、実際の写真や映像、地図などを取り入れたり、場合によっては、生徒に実験や調査を行わせたりする。

③ 判断や表現をするようにする

数学を用いて解決できることはもちろん、生徒が数学的根拠に基づいて何らかの判断や表現ができるような問題であること。

④ 数学的な価値があること

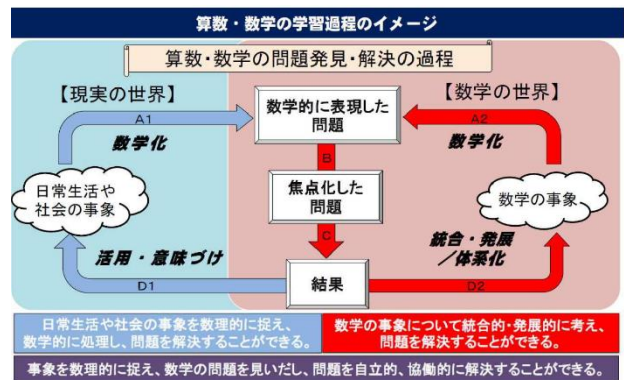
この問題を通してどんな力を身に付けさせたいのかを明確にする。「身に付けさせたい力」は、その単元で求められる数学的な知識や技能、生かす力等に限定せず、事象について論理的に考察すること、問題解決に必要な適切な条件（仮定）を設定すること、日常生活や社会の事象を数理的に捉えること、自分の考えを表現し、協働的に問題解決に取り組むことなどの資質・能力に関わるものでもよいとした。

これら4つの視点のいずれかを意識しながら問題を作成し、実践を行う。生徒の学びに向かう姿勢や生徒の振り返り、感想などを基に、数学を学ぶ楽しさやよさを感じさせることができたか、数学を日常生活や社会に生かそうという意欲や態度をもたせることができたかを踏まえつつ、授業のねらいに沿って問題を解決できたかどうかを検証する。

2. 「理想化」「単純化」の捉え方

(1) 本研究と現行学習指導要領との関連

数学的活動における問題発見・解決の過程には、下のイメージ図の通り、主として二つの過程がある。本研究では、イメージ図の左側の「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」のサイクルを軸とした数学的活動を授業構築の柱とする。



イメージ図の左側の数学的活動においては、現行学習指導要領に次のような記述がある。下線は筆者による。

日常生活や社会の事象は、そのまま数学の舞台にのせることはできないことがある。そのため、事象を数学化するには、事象に潜む関係を解明したり活用したりするなどのねらいに即して、事象を理想化したり単純化したり、条件を数学的に表現したりすることが必要である。また、得られた数学的な結果について実際の問題の答えとして受け入れるかどうかを判断するために、数学的な結果を具体的な事象に即して解釈することも必要である。このような問題発見・解決の基礎をなす技能を身に付けることにより、事象を数学の舞台にのせ、日常生活や自然界における事物・現象等の広い範囲にわたる事象について考察することができるようになる。

(2) 「数学的な考え方の先行研究」

上述の学習指導要領の記述から、生徒に「理想化」「単純化」の考え方を育む必要があると考えた。「理想化」「単純化」に関わる数学的な考え方の先行研究として、片桐(2004)は、数学の方法に関係した数学的な考え方を、11の考え方に分類・

整理し、抽象化の意味を次のように言及している。
太字は筆者による。

第一に、幾つかのものに共通な性質を引き出そうとする考え方が抽象化の考え方で、それと表裏の関係にあるものを捨象しようとする考え方がある。

また具体化の考え方をするのも、結局は事柄を抽象しようとするためであるから、第二のものとして、これを抽象化の考え方に含めていくのがよい。

いろいろな条件が一定であるような理想的な状態を考える。または条件や性質が数学的な定義や原理・法則の条件を満たしているような理想的な場合を考えることによって、事態が明確になることが多いが、このような理想的な状態を考えようとするのを理想化の考え方と呼ぶ。これを抽象化の考え方の第3のものとする。

第4に、条件を明確にしようとする考え方が抽象にとって必要である。

また、片桐(2004)は、単純化の意味を次のように整理している。

単純化の考え方①：幾つもの条件があつて、それらが何々であるかは分かっているが、それらのすべての条件を考慮しなければならないとき、その全部を考えるとすることは、はじめからはできにくいことがある。そういう場合には、そのうちのいくつかの条件を一時無視して、**簡単な基本的な場合に直して考えてみよう**とすることがある。このような考え方が単純化の考え方である。

単純化の考え方②：**条件のいくつかを簡単なものに置き直して考えようとする**考え方も、この単純化の考え方といえる。

しかし、一般性を失わないようにということは、単純化の際、忘れてはならないことである。いくら単純にしてしまふといつても、もとの問題の本質的条件や一般性を損なってしまうほどに単純化してしまったのでは意味がない。この点は理想化の考え方についても同様である。

(3) 本研究での「理想化」「単純化」の捉え方 第1学年「比例の利用」

<提示する問題>

シュレッターで細かくされたコピー用紙のゴミがあります。
このゴミはA4用紙何枚分になりますか。

<提示する情報> ゴミの重さ 6.34kg

枚数 (枚)	1	2	3	4	5
重さ (g)	4.15	8.25	12.46	16.54	20.68

上に挙げるのは前回の北数教上川・旭川大会で発表した実践の一つであるが、この実践では「理想化」を『表やグラフからこの事象を比例とみなして考える』こと、「単純化」を『比例と考えた場合の比例定数を4や4.15と考えて計算する』こととした。片桐(2004)の著書をもとに本グループでは、日常の事象を数学における既習事項とみなして考えることを「理想化」、また、問題を解く上で条件を簡単な基本的なものに直して考えていくことを「単純化」と捉えて研究を進めてきた。

実際の授業では、表を提示した段階では比例していないという発言が多かった。しかし、グラフにしたときに多少の誤差はあるものの直線を描くことから比例とみなして考えることができるという判断に至った。また、比例と考えた場合に比例定数をいくつにするとよいのかについては、はじめの段階から4.15と考える学級もあれば、4や4.2などいろいろと数値を考えながら進めていく学級もあった。「理想化」「単純化」に向かう場面を適切に展開することができた実践であった。

関数や数と式領域での実践をふまえ、図形領域においても、日常生活や社会の事象について「理想化」「単純化」の考え方をを用いて数理的に捉えられないかと考えた。2つの実践を行ったので以下で紹介する。

3. 「理想化」「単純化」の考え方を育む授業実践

(1) 第1学年「空間図形」

<本時の目標>

- ・身の回りの物体を立体と捉え、表面積や体積、またその関連という視点をもつことができる。
- ・表面積や体積を根拠として、形状の良し悪しを説明することができる

<提示する問題>

なぜ、缶詰の形はほとんどが円柱なのだろう？
直方体よりも良い理由はなんだろう？

小学算数6（教育出版 p145）で発展扱いである、円柱と角柱を比べて缶の表面積と体積を比較する問題を参考に作成した。生徒が自らネットで検索しながら、表面積に行きつくような問題の提示をした。身の回りの立体について考えるときに、体積や表面積という数量の視点を持って考えられるようになることを期待した。

<研究との関わり>

(1) 問題作成の視点

「①解決や考察の必要性をもたせる」「③判断や表現をするようにする」に焦点を当てた実践である。問題の中で生徒の置かれている役割や状況、目的などが伝わる展開になるように作成した。ただし実際の授業では時間が押してしまい、最終的な判断を表現するところまで扱うことが出来なかった。

- ・目的：缶のより良い形状を決定する
- ・役割：お菓子会社の社員
- ・状況：お菓子会社が缶詰作りに挑戦することになった。あなたは缶の形を作るチームにリーダーに選ばれた。
- ・聴衆：社長
- ・成果物：(社長への) レポート

(2) 「理想化」, 「単純化」の考えを育んだ場面
授業の中で、生徒は「理想化」, 「単純化」の考え方を意識せず缶詰の形状を円柱と捉える。身の回りの物体(缶詰)を既習の立体(円柱)として考えて、数学的に表現した問題に取り組む経験をするを目的とした。その結果、より複雑な場面になっても同じように既習の図形と結びつけて

考えることができるようになることを期待した。

<授業の実際>

【授業の流れ】

- ① 導入：目的、状況の確認
- ② 円錐の缶について考察する
- ③ 缶が直方体ではない理由を考える
→ネットで検索する
- ④ 円柱と直方体の表面積と体積を比較する
- ⑤ 社長へ提案する内容を表現する
(時間の都合で扱えなかった)

1 導入：目的、状況の確認

生徒に伝えたこと概略：

- ・あなたはフジワラビスケットの社員です。
- ・フジワラビスケットはお菓子会社ですが売上に悩み、缶詰作りに取り組むことにしました。
- ・藤原社長は「最小限のコストで最大限の利益を」が口癖です。
- ・藤原社長は「常識を疑え」が座右の銘です。
- ・あなたは缶詰作りチームのリーダーとして缶詰の形状を社長に提案する。

2 円錐の缶について考察する

円錐の形の缶について賛成か反対かを聞いた。多くの生徒が反対した。「円錐は体積が3分の1になる」という意見が出て、缶詰の内容量と立体の体積を結び付けて考えている様子が見えた。また、「円錐型の缶だと重ねられないから保管が不便」という意見が出たので、缶詰を運送する場面を想起させて、コスト面と結びつけた。

3 缶が直方体ではない理由を考える

円錐で出た欠点を解決するなら、直方体でもよいのではと問い、各自ネットで調べさせた。「他の形に比べて、缶の表面積が同じとき、円柱の方が中身を多く詰めることができる」という記載を見つけたので、そのことの何が良いのかを問い、「必要な金属が少なくなるからコスト面で良い」ということを全体で共有した。

4 円柱と直方体の表面積と体積を比較する

ネットで調べた情報を鵜呑みにして社長に伝えるわけにはいかないで、実際に具体的な円柱と

直方体の表面積と体積を求める問題を提示した。

いつもの授業よりも前向きに表面積や体積を自力で求めようとする生徒が多かった。一方で、電卓を使用しても時間がかかったため、最後の社長に提案する内容を表現することが出来なかった。



全体で円柱と直方体の体積を比較する際、 $300\pi \text{ cm}^3$ と 941.9952 cm^3 を比べて、「300と900だから900の方が大きい」と考える生徒が一定数いた。また、 π を3.14として計算することに抵抗を感じている様子はなかったが、円柱の 942 cm^3 と直方体の 941.9952 cm^3 を比べて、円柱の方が大きいと結論付け、ほとんど同じ体積ということに気が付いていない生徒もいた。また、少数ではあるが立体の高さを自分で変えて比較し、円柱と直方体の表面積と体積の関係を考察する生徒もいた。

振り返りでは、「何でポテチはほとんどが袋に入っているのにチップスターは円柱なのか調べたい。」「缶詰は円柱なのに牛乳パックは直方体や三角錐もあるのはなんでなのか気になった。」「ダンスだと円柱の方が多く収納することができて円だった場合うずを巻いてしまわないといけないので、多く収納できてもつかいづらい。部屋の角に置くことが多いダンスは円柱よりも角柱の方がいいと思いました。缶詰などと違って大量に生産はしないので微々たるコストはあまり気にしないのかなと思いました。」などと他の身の回りの事柄についても、既習の立体と捉えて考えようとしている感想が多かった。一方では、「円柱が角柱より体積が大きいなら全部円柱にすればいいのに。」という誤った一般化をした感想もあった。

(2) 第1学年 第6章「空間図形」

<本時の目標>

日常にある立体を、既習の立体と結び付けてモデル化することで、問題を解決することができる。(思考・判断・表現)

<研究との関わり>

(1) 「問題作成の視点」

「問題作成の視点」の設定の「①解決や考察の必要性をもたせる」「③判断や表現をするようにする」に焦点を当てた実践である。2つの立体を比較するために、体積に着目して計算して比較する必要がある。しかし、どちらの立体も正確には「円柱」「円錐」にならない。

そのため、「理想化」「単純化」した立体として、どのような図に表すか考察させ、ただの計算問題にならないように留意した。

(2) 「理想化」「単純化」の考えを育んだ場面

きのこの山とたけのこの里のチョコレートの部分を「理想化」「単純化」する際に「円錐なのか、半球なのか」、より近い形にするためにどう捉え、どんな図で表していくか考察する。

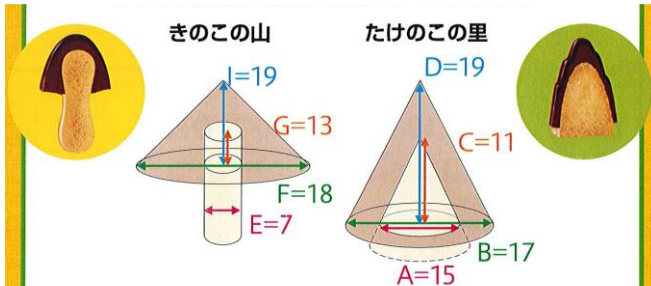
<学習指導要領との関連>

「第3章 第1節 第1学年の目標及び内容」におけるB(2)立体図形の表面積や体積の求め方を考察し表現すること(アの(イ)、イの(イ))には、「このような立体図形の求積では、ある立体の表面積や体積を求めるためには、どのような図をかいて、どの要素が分かればよいか、そのためにどのような性質や関係を用いればよいかを調べていくなど、目的を明らかにして、そこから逆向きに考えて解決していくことが考えられる。」と明記されている。

空間図形・平面図形の学習において主たる学習活動として立体の面積や体積を求めることが重視されることが多いように感じる。しかし、単に求積するだけでは、目標を達成できたとは言い難い。そこで、自ら目的を明らかにし、そのために必要な図や要素、性質や関係を見つけ出すことができるような授業を実践した。

<提示する問題>

きのこの山とたけのこの里のチョコの量が多いのはどちらか。



この問題は、第100回全国算数・数学研究大会（東京）大会（2018）にて、株式会社明治から配布されたチラシの問題を参考に作成した。生徒にとって身近なお菓子であるきのこの山とたけのこの里のチョコの量の比較をすることで興味を持って取り組めると考えた。

<授業の実際>

【授業の流れ】

- ① どちらが量が多いかの予想
- ② 比較する方法の検討
- ③ 図に表す（見取り図・断面図など）
- ④ 計算して求める（小数・分数）
- ⑤ 式の値として3.14を代入
- ⑥ 結果と考察

【実際の授業】

1 どちらが量が多いかの予想

導入で、どちらがチョコが多いと思うかという問いに対してはどのクラスもきのこの山が圧倒的であった。

2 比較する方法の検討

実際に溶かして量を図った方がいい、明治に問い合わせたりパッケージに書いていないのかななどの現実的な発言が多かったが、計算するためには？と問うと、「体積を求めれば」、「長さが分かれば」…と数学の世界に引き込んで考え始めた。

3 図に表す（見取り図・断面図など）

きのこは円錐や半球、たけのこは円錐、きのこのクッキー部分は円柱、たけのこのクッキー部分

は円錐として捉えて考察している生徒が多かった。きのこの部分については、円錐か円柱どちらがより近いのか、クッキーとチョコの重なる部分はどこまで刺さっているかを考察しながら図示していた。中には断面図を書いている生徒もいた。

4 計算して求める（小数・分数）

小数よりも分数で計算することのほうが計算しやすくなることに気付いた生徒が多かった。面積の計算についても、三角形の面積は小学校で「 $\div 2$ 」で計算していたが、中学生になると約分の利点から「 $\times 1/2$ 」にして計算している。

5 式の値として3.14を代入

最近この章で「 π 」を習った1年生からすると、1年2章で習った1次式の文字式の計算の「有用性」に気付くことができたようだ。3.14を使って計算していれば、割り切れなかったりさらに複雑な計算になることが多く、①で述べた「分数」と「小数(3.14)」が混在してしまう状況になる。そのため、 π を使い、文字式を用いることで「文字式として体積を計算する」方が計算しやすいことに気付いた生徒も何人かいた。

6 結果と考察

どのような図にすべきか、計算手順や、分数と小数の使い分けについて記述している生徒が多かった。

【成果】

(1) 身の回りのものを既習の立体とみなして捉え直すこと

身近なものを数学として捉え「円錐や円柱」などにモデル化することで、「自分たちの知っている立体にみなして考えると計算できる！」と、おどろいていた生徒が多数いた。円錐にすべきか、半球にすべきかの議論も生まれていた。全く同じ形でなくとも「理想化」「単純化」して考えることで比較したり、計算できることで「他のお菓子なら」「クッキーの体積ならどうか」「他の立体に置き換えることはできないか」と、さらに発展して考えることができていた。

(2) 単純化して考えること

円周率を3.14として計算する生徒もいれば、

π を使って計算する生徒が多かった。その中でも、3.14を3と捉えて計算する生徒もあり、単純化して考えることができていた。

【課題】

(1) 見えてない部分を図で表すこと

今回の計算の肝である「チョコの体積を求めるためには、クッキーの体積を引いて考えなければならぬ」ので、「どこまでがチョコか、どこまでがクッキーか」を予想して考えていた。チョコの厚みやクッキーとチョコが刺さっている部分がどれくらいの長さなのかを予想して考えながら図示していたが、実際の問題の図を見てみると「思ったよりクッキーが刺さっている」「意外とチョコの厚みが大きい」など、見えてない部分をどうイメージして、表現していくかがカギになっているようだった。

(2) 実物をどんな立体として捉えるかということ

はじめから立体として与えてしまうと、ただの計算問題と変わらなくなってしまふ。「図として捉える」ことや「どんな立体にみなせるか」「どの長さが必要か」など、自分で数学の世界に引き込んで考えさせる必要がある。

(3) 解決後に次につなげて考えること

身近なお菓子を数学の立体として捉え、また「他のお菓子は？」「他の立体は？」と考えることで「問題発見・解決の過程のサイクル」の2周目を回せるのではないかと考える。

今回与えた図では「円錐・円柱」が用いられているが、学習が進んでいくと「半球」や、クッキーの部分も「円柱と半球を組み合わせたもの」として考えることができる。学習が進むことで、「もっと正確に求めたい」「本当にそれでいいか」と「問題発見・解決の過程のサイクル」の2周目を回して、取り組めるとなお正確に比較できるのではないかと。

<板書から>

② どのように体積を求めればよいだろうか。

きのこ	たけのこ	きのこ	たけのこ
きのこ	たけのこ	きのこ	たけのこ
きのこ	たけのこ	きのこ	たけのこ

[比較方法]
 ・溶かす、食える
 ・重さをはかる
 ・パッケージをみる
 ・体積

① $9 \times 9 \times \pi \times 19 \times \frac{1}{3} - \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \pi \times 13$
 $= 513\pi - \frac{637}{4}\pi$
 $= \frac{2052}{4}\pi - \frac{637}{4}\pi$
 $= \frac{1415}{4}\pi$
 $\approx \frac{4245}{12}\pi \approx 353.75 \times 3.14$
 ≈ 1110.975

② $\frac{17}{2} \times \frac{17}{2} \times \pi \times 19 \times \frac{1}{3} - \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} \times \pi \times 11 \times \frac{1}{3}$
 $= \frac{341}{12}\pi - \frac{2475}{12}\pi$
 $= \frac{3016}{12}\pi$
 $\approx 251.3 \times 3.14$
 ≈ 989.18

<ワークシートの記述から>

「理想化」して
図に表している記述。

係数を比較して、どちらが多いか考察している記述。

きのこが99かった。

きのこ $\frac{4245}{12}$ たけのこ $\frac{3016}{12}$ $= \frac{1189}{12}$ ← たけのこより、きのこの方が多い量

【振り返り】考えたこと・気付いたこと・わかったこと・疑問など

πがなかったら、3.14を使い、計算も、もっと楽になったと思う。

食っている物から、どちらが多いかみたいな所が、おもしろく、ひかして「わかった」が得えた。

πを使うことについての記述

【振り返り】考えたこと・気付いたこと・わかったこと・疑問など

今回の授業を通して、身近な物を立体や平面的に表すことができ、数値化することができるといったことを感じた。 円や円錐の面積はπを使った方がいい。

【振り返り】考えたこと・気付いたこと・わかったこと・疑問など

日常生活で使っている食べ物や、物が、数学の図形の形にすることで、量比べたり、大きさ比べたりすることができるとかおもしろい。 チョコはきのこの方が99いけど、同じように、7.14で比べたらたけのこの方が体積は99いと思う。

理想化に関する記述

他の立体でも同様に考える視点の記述

【振り返り】考えたこと・気付いたこと・わかったこと・疑問など

身近な物を図形にして計算する量とチョコの量とかを求めるときができてほしいと思いました。 円錐と円柱を比べる。求めた、式は入った。たけのこ、きのこの方が、たけのこ。 7.14という数はお菓子のチョコの量とか空間図形を使、て計算してみたいと思いました。

4. 成果と課題

(1) 成果

図形領域でも、問題の提示方法によっては、「理想化」「単純化」の考え方を引き出すことができた。

(2) 課題

図形領域においては問題作成をする際に、はじめから立体ありきで提示をしてしまうと、生徒が「理想化」「単純化」の考えに至らない可能性がある。問題の設定に難しさを感じる。どの場面で「理想化」「単純化」を用いて解決に向かっているのかを考えた上で問題作成を行う必要があると考える。また、図形領域に限らず、「理想化」「単純化」の考え方が生徒に定着しているかどうか、「理想化」「単純化」のよさを生徒が理解しているかどうかを検証する方法やその評価の仕方については、今後グループの中で十分に検討していく必要がある。次回の札幌大会では、さらに実践を積み重ねていくと同時に、しっかりと検証を行って報告ができればと考えている。

参考文献

- ・中島健三, 2015, 算数・数学教育と数学的な考え方 その進展のための考察, 東洋館出版
- ・片桐重男, 2004, 新版 数学的な考え方とその指導 第1巻 数学的な考え方の具体化と指導, 明治図書
- ・西村圭一, 2010, 中学校数学科 活用型学習の実践事例集 豊かに生きる力をはぐくむ数学授業, 明治図書
- ・文部科学省 (2017) 『中学校学習指導要領 (平成29年告示) 解説 数学編』
- ・第100回全国算数・数学研究大会 (東京) 大会 (2018) にて, 株式会社明治 配布チラシから