第 80 回北数教全道札幌大会　　中学校　学習指導法Ⅰ

日常の事象や社会の事象から問題を見いだし解決する授業の創造

第３ブロック（札幌）グループ研究

北海道教育大学附属札幌中学校	古川　航也	札幌市立屯田中央中学校	宇田川　孝
札幌市立新陵中学校	戸谷 真由子	札幌市立真栄中学校	佐々木 唯衣
札幌市立福井野中学校	川井　丹斗	札幌市立南郷小学校	笠谷 将太郎
市立札幌開成中等教育学校	林　詩音	札幌市立厚別北中学校	冨永　紫
札幌市立清田中学校	原口　朋大	成城学園中学校高等学校	横山　和誉

１．はじめに

（１）研究の動機と背景

現行の学習指導要領では、数学的活動は「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」と表現されている。その上で、問題発見・解決の過程として二つの過程が挙げられ､その一つが｢日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」である。本研究はこの過程を具現化した授業実践に関する研究であり、私たちは特に授業の入口である問題作成に力点をおきながら実践を積み上げてきた。第 78 回北数教上川･旭川大会よりその実践から得られた成果や課題、生徒の変容について分析、考察し示してきた。３年目となる今回も実践を紹介する中から見えてきた成果や今後の改善点についての発表を行い、研究のまとめとしたい。

（２）研究の目的

学習指導要領において「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」が重視されている。しかし、その一方で、教科書等の問題は解決しやすいように数値や条件が設定され、生徒が数学的に処理するだけの状態になってしまっている。これでは「日常生活や社会で数学を利用する活動」に向けては不十分である。生徒が課題や問題に対して、条件を考えたり数値を適切に処理したりしながら解決へと向かっていくことが必要ではないかと考える。そこで、私たちのグループは本研究の目的を次のようにしている。

> 日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決する力をつけさせる。

この研究目的を通して生徒に数学を日常生活や社会に生かそうとする態度や、思考力・判断力・表現力を身につけさせるためにこの過程を具現化した問題づくり、ならびに授業づくりを研究していくことが大切である。すべての授業においてこのような活動を行うことは難しいところであるが、研究を重ねる中でより多く実践を積み上げていくことを考えている。

（３）研究の方法

本研究の実証方法を『問題作成をする上での視点』と『作成した問題による授業実践の検証』とした。まず､｢問題作成の視点」においては、生徒がものごとを数理的に捉えることを目指すために、西村（2010）を参考に、私たちのグループでは以下の４つとしている。

> ①　解決や考察の必要性をもたせる
> ②　現実性を大切にする
> ③　判断や表現をするようにする
> ④　数学的な価値があること

① 解決や考察の必要性をもたせる

生徒が解決の必要性を感じるようにすることが大切である。それは、他人にとっての解決の必要性でもよい。すなわち、生徒が解決を要している人の立場に近付けるように、誰が、どのようなときに、何のために、解決する必要があるのかが伝わるよう工夫する。

② 現実性を大切にする

条件や変数を整理しすぎたり、数値を計算に都合のよいように簡単にしたり、教師が与えすぎたりしないようにする。たとえば、問題場面に関する現実の統計的なデータを用いたり、実際の写真や映像、地図などを取り入れたり、場合によっては、生徒に実験や調査を行わせたりする。

③ 判断や表現をするようにする

数学を用いて解決できることはもちろん、生徒が数学的根拠に基づいて何らかの判断や表現ができるような問題であること。

④ 数学的な価値があること

この問題を通してどんな力を身に付けさせたいのかを明確にする。「身に付けさせたい力」は、その単元で求められる数学的な知識や技能、生かす力等に限定せず、事象について論理的に考察すること、問題解決に必要な適切な条件（仮定）を設定すること、日常生活や社会の事象を数理的に捉えること、自分の考えを表現し、協働的に問題解決に取り組むことなどの資質・能力に関わるものでもよいとした。

この４つの視点のいずれかを意識しながら問題を作成し、実践を行うこととする。

そして、作成した問題をもとに授業を実践し、生徒が事象を数理的に捉えて、問題を解決することができたかどうかを授業中の生徒の発言や反応、ワークシートの記述などの方法で検証していく。

（４）これまでの成果

次に示す例は第 79 回北数教渡島・檜山・胆振・日高大会で発表した実践の一つである。問題作成の視点をもとに問題づくりを行い、授業を行った。授業後に書かれた生徒のワークシートから、日常生活や社会の事象を数理的に捉えることができていると見取ることができた。

第１学年　第６章「空間図形」

＜本時の目標＞

日常にある立体を、既習の立体と結び付けてモデル化することで、問題を解決することができる。（思考・判断・表現）

＜研究との関わり＞

（１）「問題作成の視点」

「問題作成の視点」の設定の「①解決や考察の必要性をもたせる」「③ 判断や表現をするようにする」に焦点を当てた実践である。

２つの立体を比較するために、体積に着目して計算して比較する必要性がある。しかし、どちらの立体も正確には「円柱」「円錐」にならない。そのため、まずは、それぞれの立体であるとみなして、どのような図に表すか考察させ、ただの計算問題にならないように留意した。

＜提示する問題＞

きのこの山とたけのこの里のチョコの量が多いのはどちらか。

（東京）大会（2018）にて、株式会社明治から配布されたチラシの問題を参考に作成した。

＜授業の実際＞

【授業の流れ】

① どちらが量が多いかの予想

② 比較する方法の検討

③ 図に表す（見取り図・断面図など）

④ 計算して求める（小数・分数）

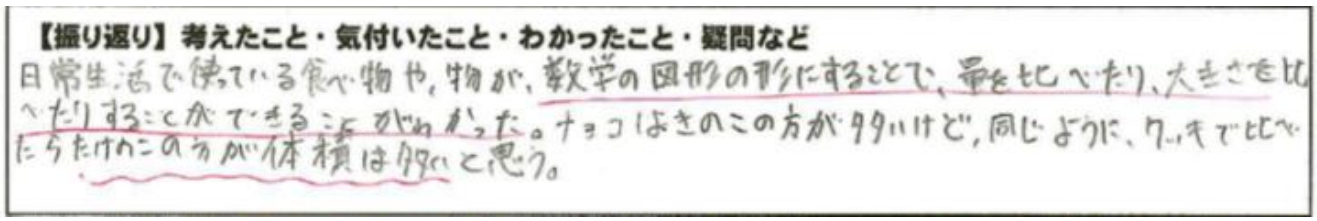
⑤ 式の値として 3.14 を代入

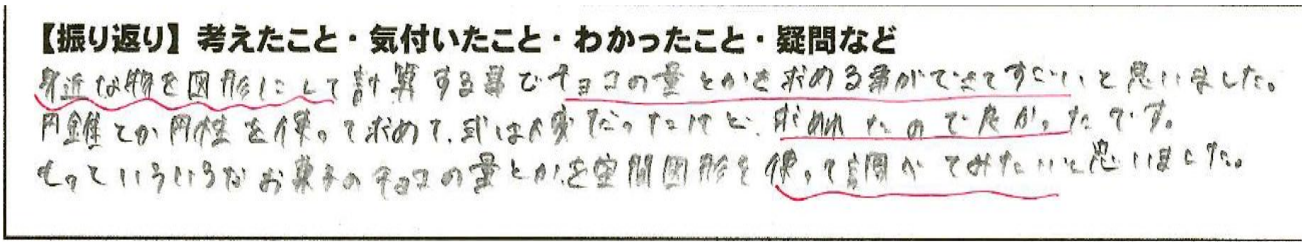
⑥ 結果と考察

＜成果＞

身近なものを数学として捉え「円錐や円柱」などにモデル化することで、「自分たちの知っている立体にみなして考えると計算できる！」と、おどろいていた生徒が多数いた。円錐にすべきか、半球にすべきかの議論も生まれていた。全く同じ形でなくとも「理想化」「単純化」して考えることで比較したり、計算できることで「他のお菓子なら」「クッキーの体積ならどうか」「他の立体に置き換えることはできないか」と、さらに発展して考えることができていた。

＜ワークシートの記述から＞


【振り返り】考えたこと・気付いたこと・わかったこと・疑問など
日常生活で使っている食べ物や、物が、数学の図形の形にすることで、量を比べたり、大きさを比べたりすることができることがわかった。チョコはさきのこの方が多いけど、同じように、クッキで比べたらたけのこの方が体積は多いと思う。


【振り返り】考えたこと・気付いたこと・わかったこと・疑問など
身近な物を図形にして計算する事でチョコの量とかを求める事ができてすごいと思いました。
円錐とか円柱を使って求めて、式は大変だったけど、求めれたので良かったです。
もっといろいろなお菓子のチョコの量とかを空間図形を使って調べてみたいと思いました。

２．本グループでの授業実践

（１）第３学年「相似な図形の利用（体積比）」

＜本時の目標＞

日常にある立体を、求積可能な既習の立体とみなすことで、相似な図形の関係を活用し問題を解決する過程を表現することができる。

＜提示する問題＞

アポロチョコレートの
「イチゴ」の部分と「チョコ」の部分は
どちらが多いだろうか。

ＴＶ画面にアポロチョコレートの写真を示し、上記の問題を提示した。体積を求めるために、「相似な円錐とみなす（理想化する）」ことができるか、拡大写真をもとに生徒に考えさせ、共有を図った。そのうえで、写真の図の線分の長さを実測し、近似値を用いて相似比から体積比を求めて「イチゴ」と「チョコ」の部分の体積を比べるという学習活動を行った。

【「問題作成の視点」とのかかわり】

本実践は「問題作成の視点」の設定の「**②現実性を大切にする**」「**④数学的な価値があること**」を重点においた実践である。

「②現実性を大切にする」について

実物を用意することによって、本当に「円錐とみなす」ことができるか考える場面を保証した。直接の測定が難しいことから拡大写真を配付し、その図を利用して必要な情報を取捨しながら解決に向かうことをねらった。

「④数学的な価値がある」について

アポロチョコレートの「イチゴ」と「チョコ」の表面的な色合いの比から導入時は「イチゴのほうが多い」「同じくらい」と予想する生徒が多いと思われる。予想と実際が異なる方が数理的にとらえたことで得られた結果の意義を実感できると考えた。実際、解決した結果が予想を覆すものとなり、驚く生徒が多かった。

また、実際を確かめるために「円錐っぽい立体」を「円錐」と仮定することが根拠になっていることを振り返らせることによって、「理想化」「単純化」することの数学的な価値を実感できると考えた。

＜学習指導要領との関連＞

「相似な図形の性質を具体的な場面で活用すること（イの(ウ)）」

相似な立体の体積比に関連して、例えば、ある商品が相似な立体とみなせる二つの箱詰めで売られているとき、相似比から体積比を求め、体積比と価格の比からどちらが割安かを調べていく学習が考えられる。学習指導要領解説数学編 P146-P147（下線、太字は筆者による）

ここで、解決に必要な仮定（条件）を日常の事象から見いだすことできるためには、相似な

立体ありきで「相似な立体」とみなせることを見た目から安易にとらえないようにすることが重要であると考えた。そこで、立面図や平面図をもとに立体の形状に注目して考える過程を大切にし、生徒自ら問題解決に必要な数値を調べようとする思考が自然に生まれるよう授業展開した。

＜授業の実際＞

導入で、アポロチョコレートの「イチゴ」の部分と「チョコ」の部分はどちらが多いかを問うと、食した経験や見た目から「イチゴの部分が多い」「同じくらい」という予想が大半だった。

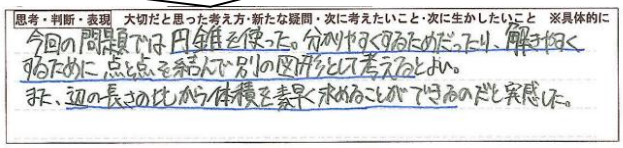
そこで、どうやって確かめるかを聞いたところ、「切って溶かす」「実際に食べる」「バラバラにしてメスシリンダーに入れる」といった操作による解決方法が出された。アポロチョコレート１個が極めて小さいことから操作による比べ方では難しいことを伝え、どちらが多いかを比べるには何がわかればよいか、改めて問い、「体積がわかればよい」ことを引き出し、拡大した写真を配付する流れとした。

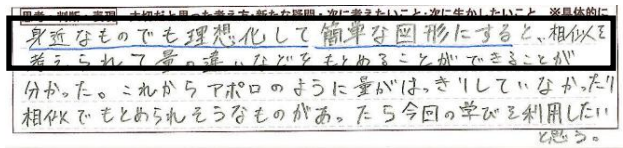
体積で比べるために「円錐っぽい」「相似になっている」といったつぶやきがあった。写真を見ながら、図に線分を書き入れている生徒の考えを取り上げ、「円錐とみなす」ことができるかを問い、納得できることを全体共有した。その後、生徒は自然と、「どこの長さが必要か」に目が行き、他者と共有していく中で、「体積の公式に当てはめるよりも体積比で考えた方が楽」ということに気づいていった。「母線の長さ」、「高さ」、「底辺の長さ」を測り、それらから相似比を求め、体積比を求めていくことができた。写真に書き入れた線分の長さが個人で異なるため、解決に必要な数値が何なのか、自ら吟味する姿が見られた。

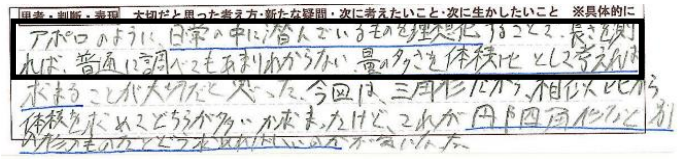
どのクラスにおいても、アポロチョコレートを安易に円錐ととらえず、形状をよく見て、「ここを削った分、この部分が長くなってもいいかな」といったつぶやきがあり、どこに線分を引いて円錐にしたらよいか、考えていた。現実の立体を、立面図をもとに考察することについて慎重であった。

＜ワークシートの記述から＞

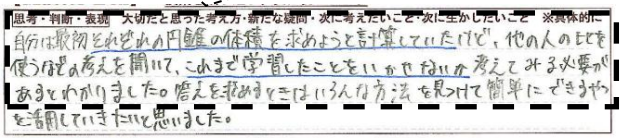
「理想化」することの価値を明記


思考・判断・表現　大切だと思った考え方・新たな疑問・次に考えたいこと・次に生かしたいこと　※具体的に
今回の問題では円錐を使った。分かりやすくするためだったり、解き易くするために点と点を結んで別の図形として考えるとよい。
また、辺の長さの比から体積を素早く求めることができるのだと実感した。

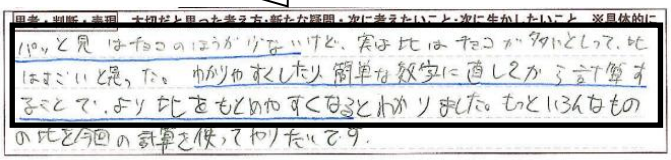

思考・判断・表現　大切だと思った考え方・新たな疑問・次に考えたいこと・次に生かしたいこと　※具体的に
身近なものでも理想化して簡単な図形にすると、相似を考えられて量の違いなどをもとめることができることが分かった。これからアポロのように量がはっきりしていなかったり相似でもとめられそうなものがあったら今回の学びを利用したいと思う。

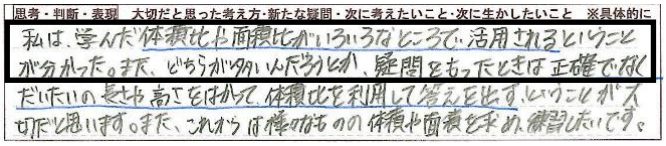

思考・判断・表現　大切だと思った考え方・新たな疑問・次に考えたいこと・次に生かしたいこと　※具体的に
アポロのように、日常の中に潜んでいるものを理想化することで、長さを測れば、普通に調べてもあまりわからない量の多さを体積比として考えれば求まることが大切だと思った。今回は、三角柱だから、相似比から体積を求めてどちらが多いか求まったけど、これが円柱や四角柱などの形のものだとどう求められないのかが気になった。

解決方法を比較した記述


思考・判断・表現　大切だと思った考え方・新たな疑問・次に考えたいこと・次に生かしたいこと　※具体的に
自分は最初それぞれの円錐の体積を求めようと計算していたけど、他の人の比を使うなどの考えを聞いて、これまで学習したことをいかせないか考えてみる必要があるとわかりました。答えを求めるときはいろんな方法を見つけて簡単にできるやつを活用していきたいと思いました。

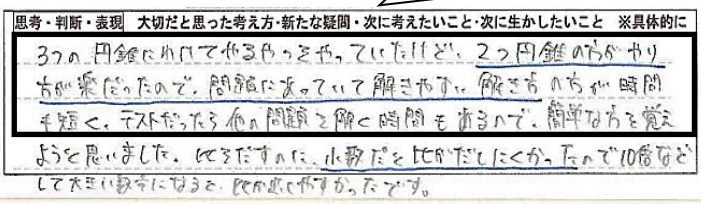
「単純化」することのよさについての記述。


思考・判断・表現　大切だと思った考え方・新たな疑問・次に考えたいこと・次に生かしたいこと　※具体的に
パッと見はチョコのほうが少ないけど、実は比はチョコが多いとして、比はすごいと思った。わかりやすくしたり簡単な数字に直してから計算することで、より比をもとめやすくなるとわかりました。もっといろんなものの比と今回の計算を使ってやりたいです。


思考・判断・表現　大切だと思った考え方・新たな疑問・次に考えたいこと・次に生かしたいこと　※具体的に
私は、学んだ体積比や面積比がいろいろなところで活用されるということが分かった。また、どちらが多いんだろうとか、疑問をもったときは正確でなくだいたいの長さや高さをはかって、体積比を利用して答えを出すというこれがスゴイだと思います。また、これからは様々なものの体積や面積を求め、練習したいです。

一方、測った線分の長さを、安易に四捨五入や切り捨てする生徒が多く、「単純化」するときにどんなことに気を配る必要があるのかについては丁寧な指導が必要だった。

「単純化」＝『楽』　【誤認識】の捉え


思考・判断・表現　大切だと思った考え方・新たな疑問・次に考えたいこと・次に生かしたいこと　※具体的に
3つの円錐にわけて出る色々をやっていたけど、2つ円錐のほうがやり方が楽だったので、問題を変えていて解きやすい。解き方のほうが時間も短く、テストだったら他の問題を解く時間もあるので、簡単なほうを覚えようと思いました。比をだすのに、小数だと比がだしにくかったので10倍などして大きい数字になると、比が出しやすかったです。

「単純化」の仕方によって得られる結果が異なること、「理想化」した図によって、その精度が異なることについて、比較する活動を取り入れて、解決の過程を振り返ることが重要であった。「数学的活動における問題発見・解決の過程を示すイメージ図のサイクルを一巡で終わらせず、「理想化」「単純化」したことが適切だったのかに目を向けさせることが図形領域においても大切であると考えられる。

（２）第１学年「空間図形」

＜本時の目標＞

教科書で学習したことをもとに、質量を正確に計ることやよくある論理クイズを解決することができる。

【「問題作成の視点」とのかかわり】

「②現実性を大切にする」について

昔の商いの場面では、枡（立方体の容器）が計量の道具として使われていたことを話題として取り上げ、図形の性質が日常生活に活用されていることに関心が高まることを期待した。教科書の７章 章の問題【学んだことを活用しよう】の問題（教育出版　中学１年　P.247）を利用した。

＜学習指導要領との関連＞

「イの(イ)『立体図形の表面積や体積の求め方を考察し表現すること』に関連して、立方体の形をした容器に入った水の体積を求めることを取り扱うものとする」

立体図形の体積では、ある立体の表面積や体積を求めるためには、どのような図をかいて、どの要素がわかればよいか、そのためにどのような性質や関係を用いればよいかを調べていくなど、目的を明らかにして、そこから逆向きに考えて解決していくことが考えられる。～空間図形についての理解を一層深め、論理的に考察し表現する力を養う。

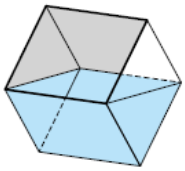
＜提示する問題＞

量りや計量器を使わないで、質量を正確に計りたい。そのための道具として枡（立方体の容器）を使います。

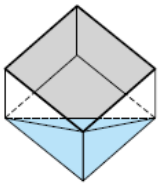
（１）傾けて水を入れました。㋐、㋑にはそれぞれ何 ml の水が入っていますか。

昔の風景画に描かれている枡を見せ、今みたいに電子機器や天びんすら無かった時代から、質量を正確に計る行為があったこと、必要だったことを話題として取り上げる。

㋐



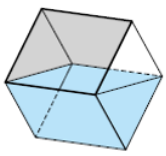
㋑



＜授業の実際＞

始めに、㋐、㋑それぞれの水の量を求めるときに、見た目から体積を考えようとする生徒と、水が入っている部分を他の角柱や角錐に見立てて計算で体積を求めようとする生徒に分かれた。それぞれの思いついた方法で答えを出してよいことを伝え、解答と考え方を比較した。

㋐



①見た目で考えると…

対角線で半分に切っているから、150ml

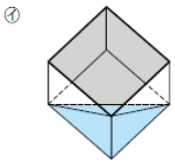
②計算で求めると…

立方体の１辺の長さを a cmとすると、

水の入った三角柱の体積は、

$a \times a \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a^3 = \frac{1}{2} \times 300 = 150$

㋐の図については、見た目から考えた答えと三角柱と見立てて計算した答えが一致した。そこから、見た目から考えた答えの正当性を考えさせ、「もとの四角柱と水の部分の三角柱を比べると『底面積が半分になっている』から体積も半分になっている」と考えてよいことに気付いた。㋑の図については、見た目から考えた答えにばらつきがあったが、先ほどのアの図の考え方と同様に考えると、「㋐の三角柱に比べて㋑の三角錐は『底面積、高さが等しい角錐』だから、体積は 1/3 であると考えることができることに気付いた。



①見た目で考えると…
・アを、さらに対角線で半分に切っているから、75ml
・アの半分よりは少なそうだから、1/3 で 50ml
…など

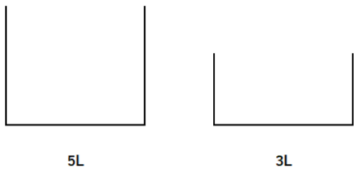
②計算で求めると…
アの三角柱と同じ底面積、同じ高さの三角錐だから

$150 \times \frac{1}{3} = 50$

（２）器を何回か使って、250ml 分の水を水筒に入れたい。

（１）の問題から、この容器にはもとの四角柱の体積の 1/2、1/6 を入れることができるから、その組み合わせで 5/6 を使えばよいことを確認し、解き方を考える。このとき、この体積の測り方が実際の商いの場でも使われていたことを話題にあげる。（２）の問題の最適解は、㋑の図のように水を残したときの、捨てた分の水がちょうど 250ml であるが、商いの場でその方法を用いたときに、相手方に納得してもらえるのだろうか、という問いも投げかけた。この測り方で商いが成り立つということは、売り手だけでなく買い手にも数学の知識が必要であることに気付いてほしかったが至らなかった。
さらにこの図形の性質が使える場面を提示する。

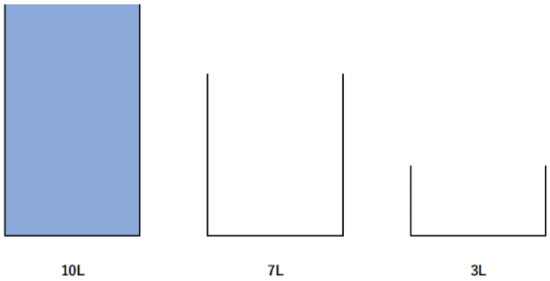
5 リットルでいっぱいになるコップと 3 リットルでいっぱいになるコップがあります。この 2 つのコップを使い 4 リットルを測るにはどうすれば良いでしょうか？



本来の論理クイズの解き方としては、５つ以上の手順を踏む必要がある。このようなクイズを苦手とし、少し考えてあきらめてしまう生徒が多い。ただし、本時の内容を使って解くように伝えると、２つのコップに（１）の㋐の図のように水を入れれば、４L を測ることができることに気付く生徒が多かった。

また、同様の問題として、

10 リットルでいっぱいになるコップ、7 リットルでいっぱいになるコップ、3 リットルでいっぱいになるコップがあります。10 リットルのコップにだけ、水が満タンに入っています。3 つのコップを使い、5 リットルをとりわけるにはどうすれば良いでしょうか？



このクイズは、本来なら 1 つ目のクイズよりも難しい手順を必要とする問題なのだが、本時の内容を使って解いてよいのならば、10L でいっぱいになるコップを㋐の図のようにして、こぼれる水を 7L でいっぱいになるコップにうつせばよい。1 つ目のクイズの解き方を参考にして、多くの生徒がその解き方に気付いた。

この論理クイズで、コップを斜めにするような考え方を使って答える人はほとんどいないだろう。数学の授業でも、関数のグラフや平面図形、空間図形の分野で図を斜めにみることは避け、水平方向と垂直方向に注目して問題を解くように指導することがほとんどである。本時では、底面積や高さに注目することで、図形を斜めに考えても計算することができる。その知識を得ることで、今までは思いつかなかった発想が生まれ日常生活でも生かすことができるという、数学の有用性を感じることができたと考える。

＜ワークシートの記述から＞
生徒の反応（授業の振り返り）としては、
・そもそも勉強していないと、この発想は思い浮かばなかった。
・特別な道具がなくても、正確に測れることは面白いと思った。

・辺の長さや円の半径を測らなくても、水量を計算できることは便利だと思う。
・「これでよいから」と言われても、理解するだけの知識がないと、文句を言ってしまうと思う。
などがあった。

本時の問題は既存の問題を使用したが、社会で使われた物として問いかけをすることで、「数学化」されていることを、生徒たちは意識しながら問題に取り組めた。後半に論理クイズを扱ったことは、学習内容への理解を深める点では効果的であった。

３．成果と課題

（１）成果

既習の内容と結びつけて図を「理想化」したり、解決のために「単純化」したりする考え方を生徒から引き出すことで、解決に必要な条件や数値を自ら吟味する姿が見られた。また、解決する上で直感的にかつ経験的に結果を予想し、その真偽に戸惑いがあることで事象を数理的にとらえて解決したいという意思を引き出すこともできた。問題解決をする過程においては、生徒のつぶやきやワークシートの記述をもとに全体共有することも一つの手立てとなった。

（２）課題

日常生活や社会の事象の問題に直面した時、与えられた要素や変数などをどのように処理すればよいのかということについて、丁寧な指導が必要である。例えば図形領域において、はじめから立体ありきで提示をしてしまうと、生徒が「理想化」「単純化」という考えに至らない可能性がある。生徒がどう解決に向かっていくのかを考えた上で実践を行う必要があると考える。

そして、日常生活や社会の事象を数理的に捉える「目」を育むために、問題の作成たけではなく、思考の過程の共有の仕方やタイミング、発問についての工夫をしていく必要がある。また、それらを検証する方法として、統一したワークシートを使用したり、生徒の発言をどのように捉えるのかという視点を設定したりするなどの検討をしていくことも大切である。今後もオーセンティックな学びが自分の力で進められる生徒の育成を目指していきたい。

参考文献

・中島健三、2015、算数・数学教育と数学的な考え方 その進展のための考察、東洋館出版
・西村圭一、2010、中学校数学科 活用型学習の実践事例集 豊かに生きる力をはぐくむ数学授業、明治図書
・文部科学省（2017）『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　数学編』
・第 100 回全国算数・数学研究大会（東京）大会（2018）にて、株式会社明治　配布チラシから